政治過程論演習

コラム 8: モンティ・ホール問題

宋 財泫

2017/07/03 (月)

神戸大学 法学研究科

モンティ・ホール問題

モンティ・ホール問題とは

ゲームショー番組「Let’s Make a Deal」のコーナーから由来

- 司会者の芸名がモンティ・ホールさん
- 「直感で正しいと思える解答と、論理的に正しい解答が異なる問題」と代表例

Figure 1: Monte Halparin 氏

モンティ・ホール問題

- 3 つのドアがあり、1 つのドアの向こうには車、残りのドアの向こうには山羊
- 参加者は 1 つのドアを選択
- 司会者は残りのドアの中から 1 つを開けて中を見せる
    - 参加者が既に当たりのドアを選んでたら...

      $\Rightarrow$ 適当に一つを開けて見せる
    - 参加者がハズレのドアを選んでたら...

      $\Rightarrow$ 山羊があるドアを開けて見せる
- 参加者には選択を変更するチャンスがある

$\Rightarrow$ 車が欲しい場合、選択を変更する? しない?

論争の始まり

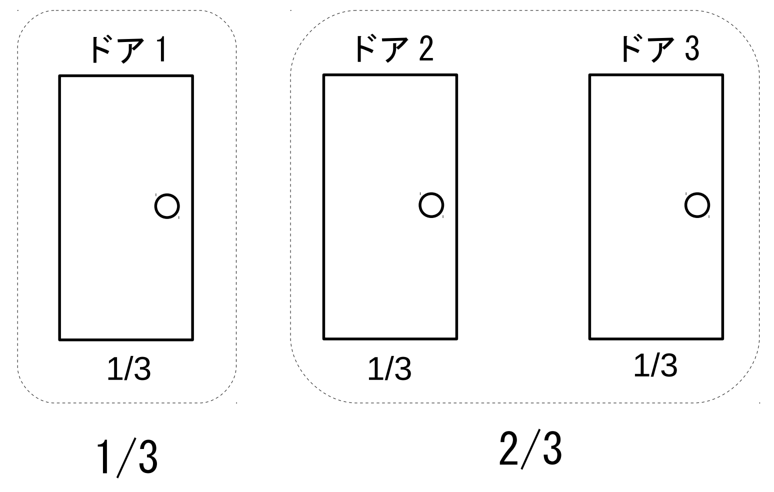
ニュース雑誌 *Parade* の「Ask Marilyn」

- 「ドアを変更したら当たりの確率が 2 倍になる」
- 彼女の回答は間違っているとの投書が殺到
    - 中には博士学位の人も

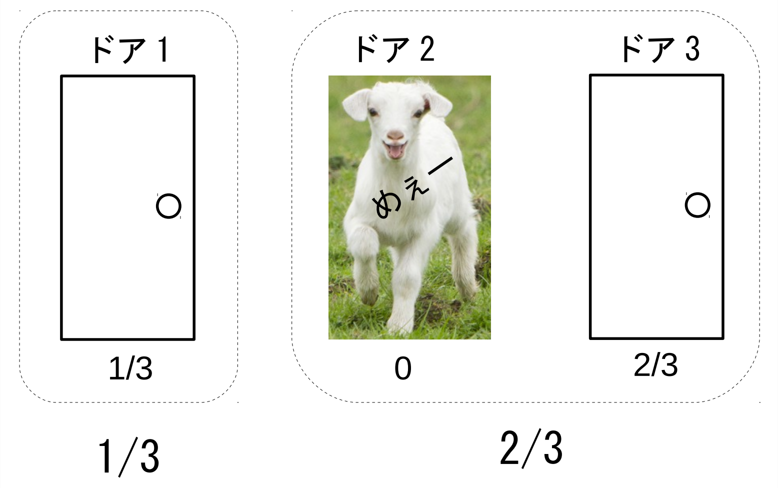
Figure 2: マリリン氏

簡単な解

簡単な解 1: 図で考えてみる



簡単な解 1: 図で考えてみる



簡単な解 2: 場合の数を数えてみる

当たりドア	参加者の選択	司会者が開けるドア	選択を...変えたら	選択を...変えなかったら
ドア 1	ドア 1	ドア 2 or 3	ハズレ	**当たり**
ドア 1	ドア 2	ドア 3	**当たり**	ハズレ
ドア 1	ドア 3	ドア 2	**当たり**	ハズレ
ドア 2	ドア 1	ドア 3	**当たり**	ハズレ
ドア 2	ドア 2	ドア 1 or 3	ハズレ	**当たり**
ドア 2	ドア 3	ドア 1	**当たり**	ハズレ
ドア 3	ドア 1	ドア 2	**当たり**	ハズレ
ドア 3	ドア 2	ドア 1	**当たり**	ハズレ
ドア 3	ドア 3	ドア 1 or 2	ハズレ	**当たり**
当たりの回数			6 回	3 回

- 最初に当たりを選んだら「変えない」$\leftarrow \frac{1}{3}$
- 最初にハズレを選んだら「変える」$\leftarrow \frac{2}{3}$

シミュレーションによる解

シミュレーションの設計

1. 当たりドアを $\{1, 2, 3\}$ から無作為に決定
2. 最初の選択を $\{1, 2, 3\}$ から無作為に決定
3. 最初の選択に応じて開けるドアを決める
    3.1 最初に当たりドアを選んだら
        $\Rightarrow$ 残りの二つのドアから無作為に一つを決定し、開ける
    3.2 最初にハズレのドアを選んだら
        - もう一個のハズレのドアを開ける
4. $\frac{1}{2}$ の確率で選択を変えるか否かを決定する
5. 結果を記録する
6. 5 万回繰り返す

ソースコード

シミュレーション用のソースコード (1/2)

```
mh.sim <- function(){
    result.vec <- rep(NA, 6)

    atari   <- sample(1:3, 1)
    choice1 <- sample(1:3, 1)
    change  <- sample(c("stay", "switch"), 1)

    if (atari == choice1) {
        opened.door <- sample((1:3)[-atari], 1)
    }else{
        opened.door <- (1:3)[-c(atari, choice1)]
    }
```

シミュレーション用のソースコード (2/2)

```
    if (change == "stay") {
        choice2 <- choice1
    }else{
        choice2 <- (1:3)[-c(opened.door, choice1)]
    }

    if (choice2 == atari) {
        result <- "Atari"
    }else{
        result <- "Hazure"
    }

    result.vec <- c(atari, choice1, opened.door,
                    change, choice2, result)
    return(result.vec)
}
```

シミュレーションの実行

1 万回のシミュレーションを実行

```
n.sim <- 10000
result.df <- data.frame("Atari"      = rep(NA, n.sim),
                        "Choice1"    = rep(NA, n.sim),
                        "OpenedDoor" = rep(NA, n.sim),
                        "Switch"     = rep(NA, n.sim),
                        "Choice2"    = rep(NA, n.sim),
                        "Result"     = rep(NA, n.sim))

for (i in 1:n.sim) {
    temp.vec <- mh.sim()
    result.df[i, ] <- temp.vec
    print(paste(i, "/", n.sim))
}

with(result.df, table(Switch, Result))
```

シミュレーションの結果

	あたり (車)	はずれ (山羊)
選択を変更 ×	1663	3373
選択を変更 ◯	3313	1651

- 選択を変更しなかった場合 (5,036 回)
  $\Rightarrow$ 車 33.0%; **山羊 67.0%**
- 選択を変更した場合 (4,964 回)
  $\Rightarrow$ **車 66.7%**; 山羊 33.3%

ドアを変更 $\rightarrow$ 車が当たる確率が 2 倍 $\uparrow$

シミュレーションの拡張

モデル拡張の方向

- ドアが 4 つ以上なら?
- あたりドアが 2 つ以上なら?

$\Rightarrow$ ドアの数とあたりの数で確率が体系的に変化するか

シミュレーションの設計

1. 当たりドアを $\{1, 2, \ldots, N_D\}$ から N_C 個、無作為に決定
2. 最初の選択を $\{1, 2, \ldots, N_D\}$ から無作為に決定
3. 残りのハズレのドアから無作為に一つを決定し、開ける
4. $\frac{1}{2}$ の確率で選択を変えるか否かを決定する
5. 選択を変更した場合、どのドアを選択するかは無作為に決定
6. 結果を記録する
7. 5 万回繰り返す

拡張モデルのコード (1/2)

```
mh.sim2 <- function(door = 3, car = 1){
    result.vec <- rep(NA, 6)

    atari   <- sample(c(1:door), car)
    choice1 <- sample(c(1:door), 1)
    change  <- sample(c("stay", "switch"), 1)

    opened.door <- sample(rep(c((1:door)[-c(atari, choice1)]), 2), 1)

    if (change == "stay") {
        choice2 <- choice1
    }else{
        choice2 <- sample((1:door)[-c(opened.door, choice1)], 1)
    }
```

拡張モデルのコード (2/2)

```
    if (choice2 %in% atari) {
        result <- "Atari"
    }else{
        result <- "Hazure"
    }
    return(c(change, result))
}

Gmh.sim <- function(door, car, n.sim = 50000) {
    result.df <- data.frame("Switch" = rep(NA, n.sim),
                            "Result" = rep(NA, n.sim))
    for (i in 1:n.sim)
        result.df[i, ] <- mh.sim2(door, car)

    return(result.df)
}
```

拡張モデルの実行

ドアの数を 4∼10、車の数を 1∼8 に調整

```
GMH.df <- data.frame(Door = NA, Car = NA,
                     Stay.Atari = NA, Switch.Atari = NA)

for (i in 4:10) {
    for (j in 1:(i - 2)) {
        temp.df    <- Gmh.sim(door = i, car = j, n.sim = 20000)
        temp.tab   <- with(temp.df, table(Switch, Result))
        Atari.p    <- temp.tab[, 1] / rowSums(temp.tab)
        result.vec <- c(i, j, Atari.p)

        GMH.df <- rbind(GMH.df, result.vec)
    }
}
```

シミュレーションの結果１

選択を変更**しなかった**場合、あたりの確率 (%)

		ドアの数							
		3	4	5	6	7	8	9	10
車の数	1	33.3	25.1	20.2	16.7	14.2	12.3	11.1	10.0
	2		49.5	40.2	33.0	29.2	24.5	22.6	19.6
	3			60.8	49.7	42.7	38.0	33.3	29.8
	4				66.8	57.3	49.9	44.3	40.3
	5					71.5	62.3	55.0	50.5
	6						74.7	66.9	59.8
	7							77.6	70.3
	8								79.8

シミュレーションの結果 2

選択を変更した場合、あたりの確率 (%)

		ドアの数							
		3	4	5	6	7	8	9	10
車の数	1	66.7	38.1	26.7	21.0	17.4	14.7	12.6	11.1
	2		75.0	53.1	41.5	33.9	29.6	25.6	22.4
	3			73.6	62.6	51.4	43.8	38.0	33.6
	4				78.2	68.7	57.8	50.9	44.8
	5					82.4	72.8	63.3	55.6
	6						84.7	76.3	67.8
	7							86.8	78.7
	8								88.4

ドアの数、車の数、選択変更の影響 1

Q. 選択の変更によって当たり確率は何%ポイント上がるか

変更なしの場合、考えられるモデル

$$当たり確率 = \frac{車の数}{ドアの数}$$

実際に回帰分析 (切片なし) を実行してみると. . .[1]

$$当たり確率 = 0.9999\frac{車の数}{ドアの数}$$

[1]調整済み R^2 は 1.0000

ドアの数、車の数、選択変更の影響 2

Q. 選択の変更によって当たり確率は何%ポイント上がるか

ドアが N_D 個、当たりの車が N_C 個ある場合、選択を変更したら、車が当たる確率は?

考えてみましょう

$N_C = 1$ の場合における解

Steve Selvin (1975)[2] の解 (車が一個のみの場合)

$$P(Car|Switch) = \frac{N_D - 1}{N_D(N_D - p - 1)}$$

- $P(Car|Switch)$: 選択を変更した場合、車が当たる確率
- N_D: ドアの数
- p: 司会者が開けるドアの数

車が二個以上ある場合は. . . ?

[2] Dickey, James *et al.,* 1975, “Letters to the Editor,” *The American Statistician,* Vol.29, No.3, pp. 131–134

$N_C \geq 1, p = 1$ の場合における暫定的な解 (宋 ver.)

$$\begin{aligned} P(Car|Switch) &= \frac{N_D - 1}{N_D} \cdot \frac{1}{N_D - 2} \cdot N_C \\ &= \frac{N_D - 1}{N_D(N_D - 2)} N_C \end{aligned}$$

- $P(Car|Switch)$: 選択を変更した場合、車が当たる確率
- N_D: ドアの数
- N_C: 当たり (車) の数

回帰分析 (切片なし) の結果、調整済み $R^2 = 0.9994$

$$P(Car|Switch) = 0.9843 \frac{N_D - 1}{N_D} \cdot \frac{1}{N_D - 2} \cdot N_C$$

もし山羊が欲しかったら...

チベットでは山羊が重宝される

今日の発見をチベットの友達に教えてあげよう!