Regression Discontinuity Designs

Jaehyun SONG

Kobe University

2016/07/12

Regression Discontinuity Designs?

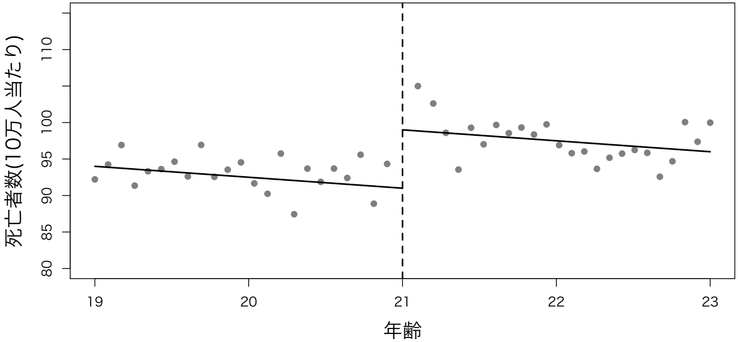
- 日本語では「**回帰不連続デザイン**」
  - RDD と略す
- ある閾値を超える = 処置を受ける
- 連続した変数の閾値周辺において閾値を超えたか否かは**偶然**による (as-if-as random)

例) 90 点で「秀」を取った人と、89 点で「優」を取った人には能力の差があるか？

RDD の例

飲酒年齢と死亡率 (Carpenter and Dobkin 2009, 2011)

- 歳をとると死亡率は ↓、飲酒可能年齢になると切片 ↑



2つの RDD

SRD Sharp Regression Discontiuity

- Running varialbe が閾値を超えると**必ず**処置

FRD Fuzzy Regression Discontiuity

- Running varialbe が閾値を超えると**確率的**に処置

Sharp RD

- 閾値を超えると**必ず**処置を受ける

  例) 20 歳を超えると誰でも飲酒可能になる。

$$D_a = \begin{cases} 1, & \text{if } a \geq 21 \\ 0, & \text{if } a < 21 \end{cases}$$

- D_a: お酒が飲めるか否か $\rightarrow$ Treatment variable
- a: 年齢 $\rightarrow$ Running variable

Sharp RD の推定

$$\bar{M}_a = \alpha + \rho D_a + \gamma a + e_a \quad (1)$$

$\bar{M}_a$ 誕生日を基準とした a 月 (30 日) における死亡率

- 誕生日が 10 月 8 日なら 10 月 8 日から 11 月 7 日までの死亡率

D_a 飲酒可能年齢か否か

a 誕生日を基準とした月 (30 日)

Sharp RD の推定

$$\bar{M}_a = \alpha + \rho D_a + \gamma a + e_a \tag{1}$$

- ρ 飲酒による影響 (切片のジャンプ)
- γ 年齢が死亡率に与える影響
- このモデルは a が $\bar{M}_a$ に与える影響が D_a と関係なく一定であると仮定 (スライド p.3)

Sharp RD における因果関係の妥当性

$$D_a = \begin{cases} 1, & \text{if } a \geq 21 \\ 0, & \text{if } a < 21 \end{cases}$$

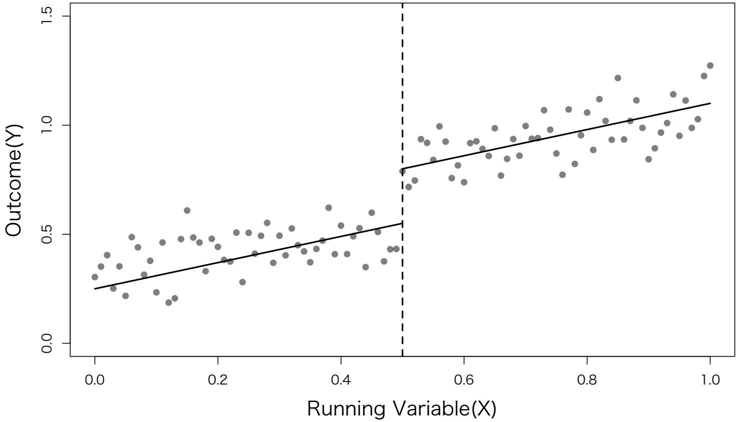
- D_a は年齢のみに依存する

$\Rightarrow$ D_a は式 (1) において他の変数と独立

$\Rightarrow$ 欠落変数バイアスがない $\rightarrow$ 因果効果

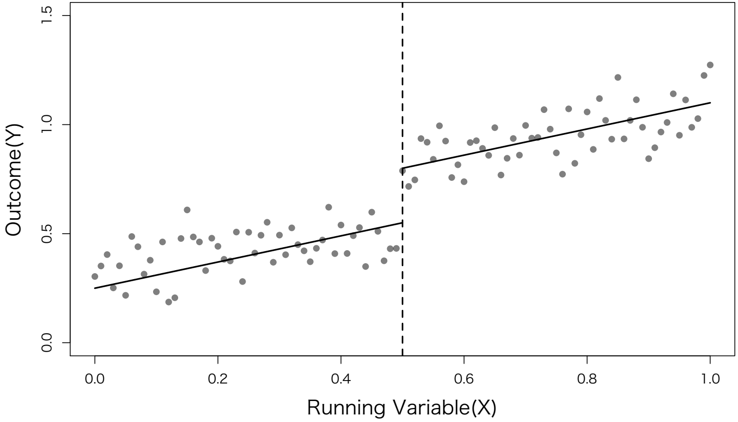
Sharp RD の識別

線形 RDD



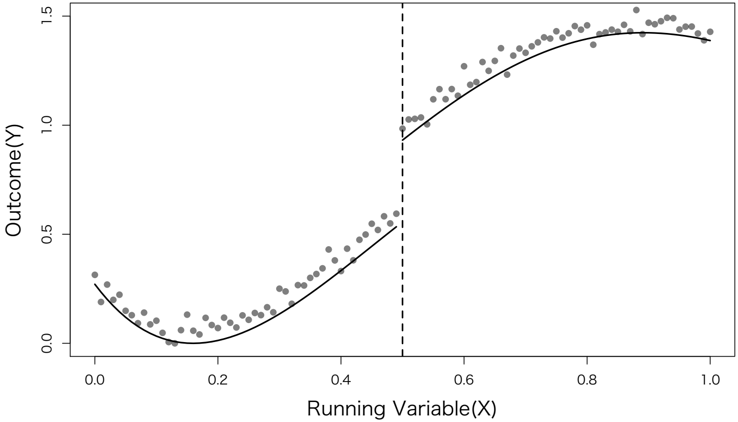
Sharp RD の識別

例) $\bar{M}_a = \alpha + \rho D_a + \gamma a + e_a$



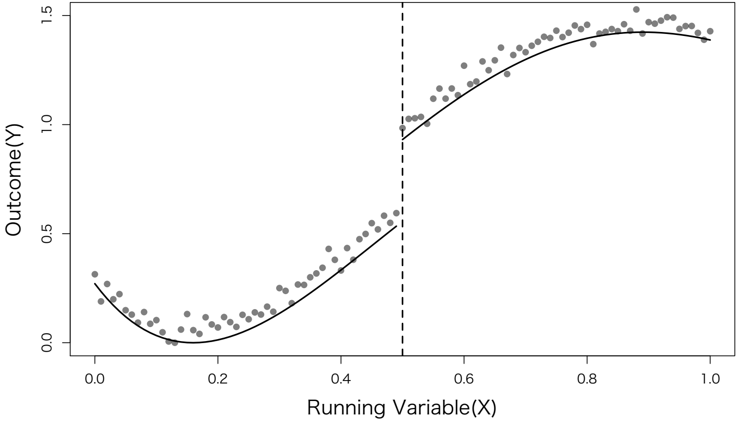
Sharp RD の識別

非線形 RDD



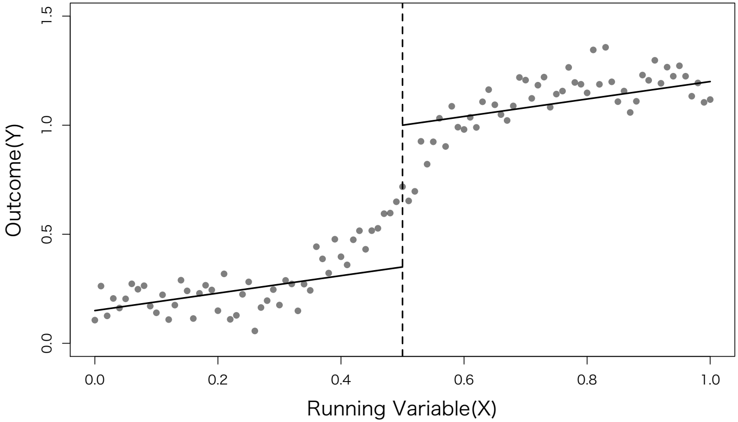
Sharp RD の識別

例) $\bar{M}_a = \alpha + \rho D_a + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + e_a$



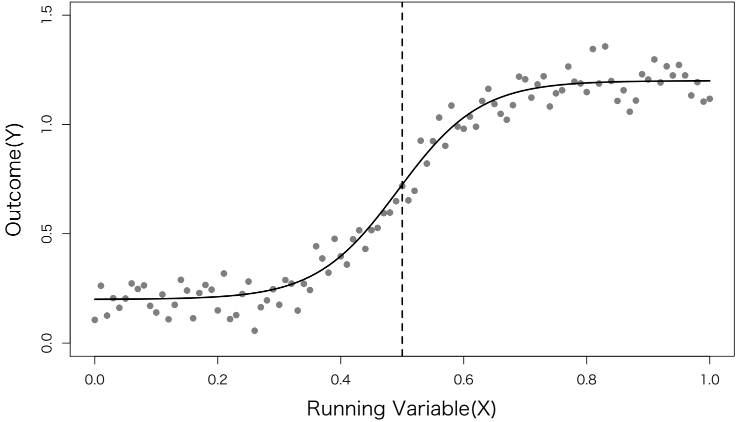
Sharp RD の識別

線形 RDD に見えるが . . .



Sharp RD の識別

実は RDD ではない



Sharp RD 推定の拡張: 非線形

Running variable と Outcome が非線形の関係である場合

- 多項式

$$\bar{M}_a = \alpha + \rho D_a + \gamma_1 a + \gamma_2 a^2 + e_a \tag{2}$$

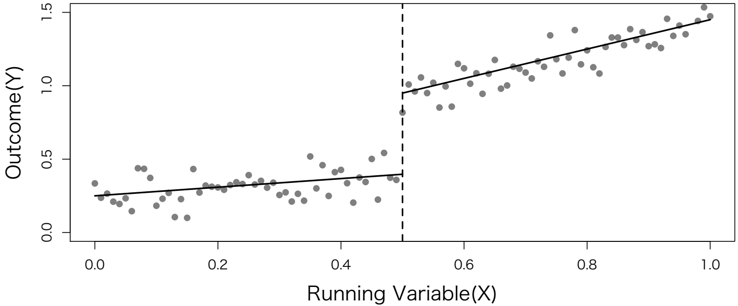
- 自乗項だけでなく、三乗、四乗、... も可能

Sharp RD 推定の拡張: 傾きの変化

閾値によって Running variable の傾き (γ) が変わる場合

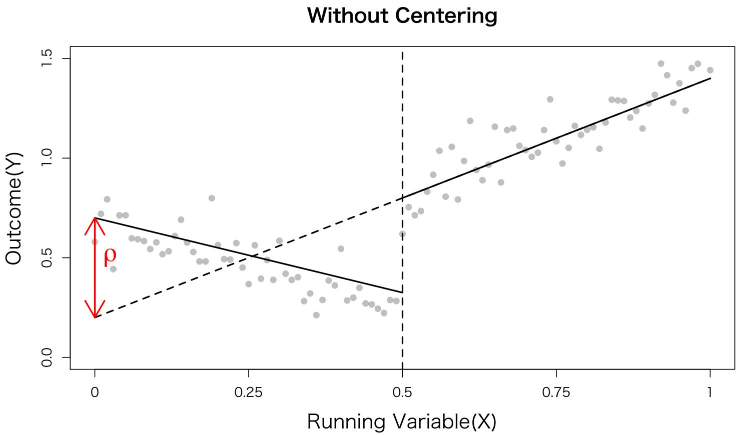
$\Rightarrow$ RV の閾値 (a_0) で**中心化 (Centering)** & 交差項

$$\bar{M}_a = \alpha + \rho D_a + \gamma(a - a_0) + \delta[(a - a_0)D_a] + e_a \qquad (3)$$



Sharp RD 推定の拡張: 傾きの変化

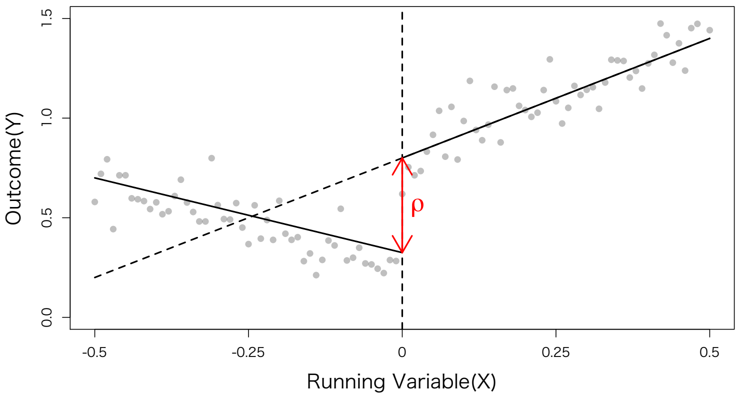
$$\bar{M}_a = \alpha + \rho D_a + \gamma a + \delta[a \times D_a] + e_a$$



Sharp RD 推定の拡張: 傾きの変化

$$\bar{M}_a = \alpha + \rho D_a + \gamma(a - a_0) + \delta[(a - a_0)D_a] + e_a$$

With Centering



Sharp RD 推定の拡張: 非線形&傾きの変化

Running variable と Outcome が非線形の関係&傾きが変化

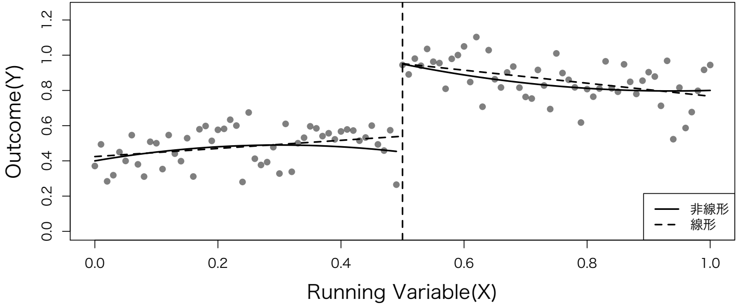
$\Rightarrow$ これまでの方法の組み合わせ

$$\begin{aligned}\bar{M}_a &= \alpha + \rho D_a + \gamma_1 (a - a_0) + \gamma_2 (a - a_2)^2 \\ &\quad + \delta_1 [(a - a_0) D_a] + \delta_2 [(a - a_0)^2 D_a] + e_a \end{aligned} \tag{3}$$

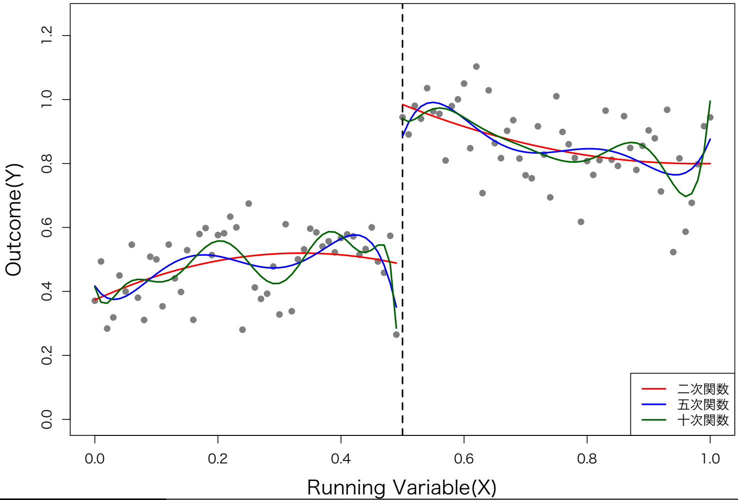
Sharp RD 推定の拡張: 線形? 非線形?

Case by Case

- 非線形でも線形で fitting しても大きなバイアスがかからないケース
- 何乗まで投入するかの問題 (→ カーネル回帰?)

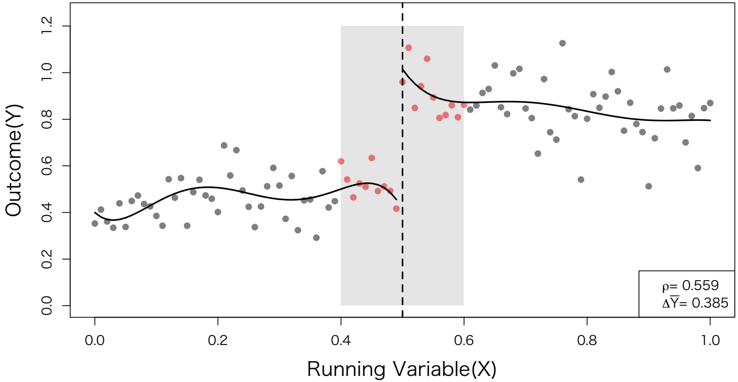


Sharp RD 推定の拡張: 線形? 非線形?



Parametric RD

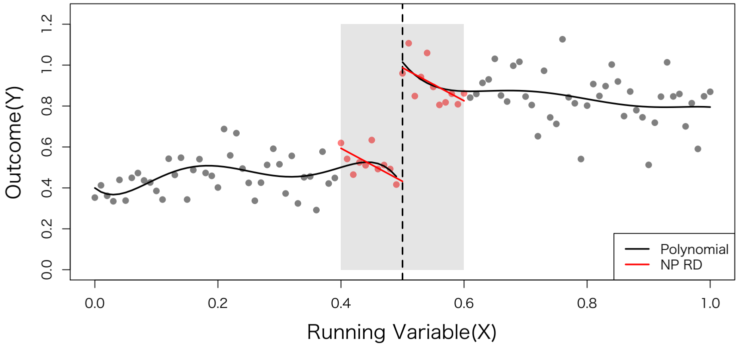
多項回帰式による推定では ρ にバイアス
$\Rightarrow$ 閾値周辺 (bandwidth 内) の値の平均値を比較



Non-parametric RD

Bandwidth 内のサンプルで線形回帰

$$\bar{M}_a = \alpha + \rho D_a + \gamma a + e_a;$$
$$\textit{in a sample such that } a_0 - b \leq a \leq a_0 + b.$$



Bandwidth の話

Bandwidth をどう決めるか

広い BW　サンプルサイズが大きくなり、精度 (precision)$\uparrow$

$\leftrightarrow$ バイアス$\uparrow$

狭い BW　サンプルサイズが小さくなるが、バイアス$\downarrow$

$\leftrightarrow$ 精度$\downarrow$

- **適切な Bandwidth はサンプルサイズの影響を受ける**が、明確なルールはない

Fuzzy RD

RV が閾値を超えると**確率的**に処置を受ける。

$$P(D_i = 1|R_i) = \begin{cases} g_1(R_i), & \text{if } R_i \geq R_0 \\ g_0(R_i), & \text{if } R_i < R_0 \end{cases}$$

where $g_1(R_i) \neq g_0(R_i)$

- 閾値を超えたか否かによって処置の確率関数が変わる。
- 確率的に処置 $\cdots \rightarrow$ 操作変数法?

Fuzzy RD の例

クラスメートが成績に与える影響 (peer effect)

$$Y_i = \theta_0 + \theta_1 \bar{X}_{(i)} + \theta_2 X_i + \upsilon_i \tag{4}$$

- Y_i 学生 i の数学成績 (7 年生)
- X_i 学生 i の数学成績 (4 年生)
- $\bar{X}_{(i)}$ 学生 i のクラスメートの数学成績 (4 年生)

Fuzzy RD の例

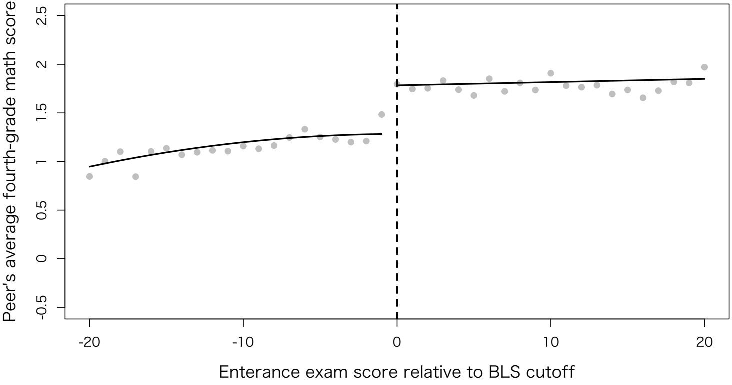
欠落変数バイアス (OVB) が存在

- 一般的な学校では社会経済状況が似ている場合が多い
  例) 人種、所得、学歴などによる特定地域への集中
- 名門私立高校 (Exam school) 入試データを用いる

Fuzzy RD の例

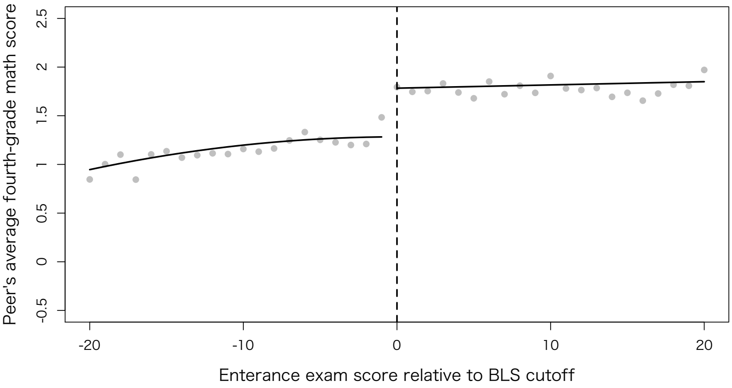
Fuzzy RD の例

ギリギリで BLS 合格ラインを超えた学生、超えなかった学生の背景はあまり変わらない。



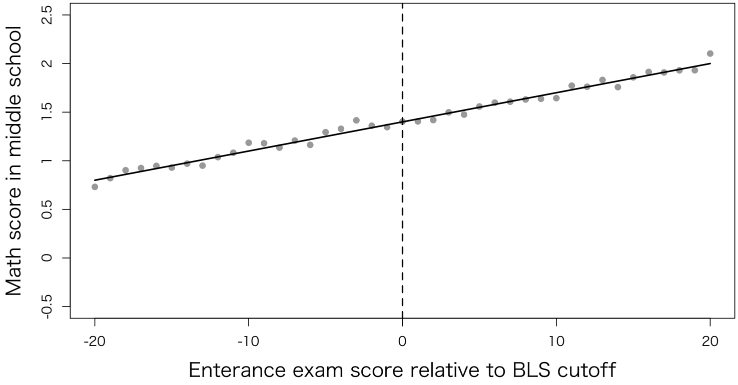
Fuzzy RD の例

BLS には頭の良いクラスメートがいっぱい



自分自身の成績は?

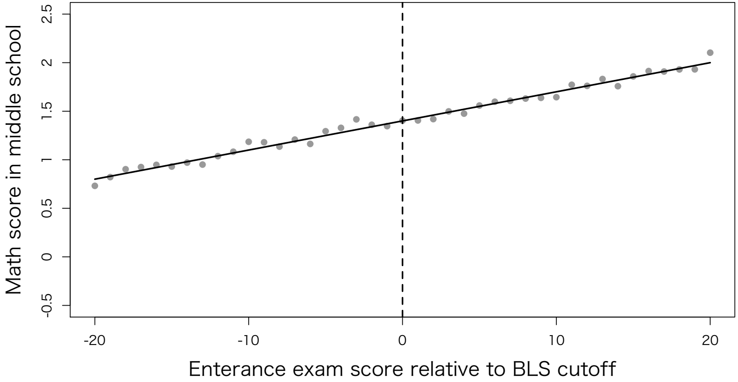
しかし、入試試験と中学時代の成績には正の関係はあるものの、平行な jump は見られない。



自分自身の成績は?

$$Y_i = \alpha_0 + \rho D_i + \beta_0 R_i + e_{0i},$$

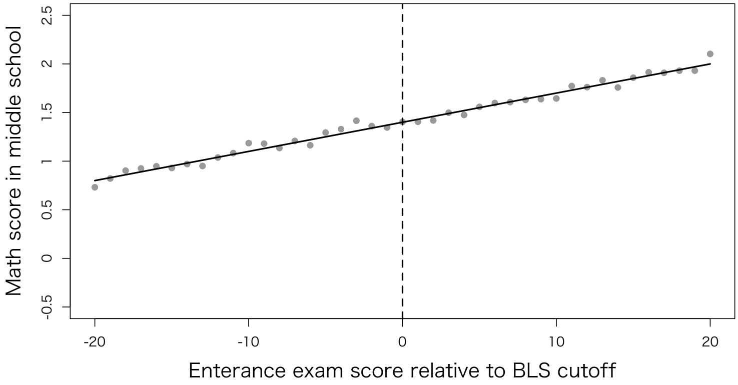
Y_i: 中学時代の成績, D_i: 閾値を超えたか, R_i: 入試成績



自分自身の成績は?

$$Y_i = \alpha_0 + \rho D_i + \beta_0 R_i + e_{0i},$$

下の図は $\rho = 0$ の場合 (実際のデータでは $\rho = -0.02$)



自分自身の成績は?

BLS に優秀なクラスメートが多いのは確認できるが、それによって自分自身の成績が上がるわけではない。

$\Rightarrow$ “Peer effect” はない?

FRD = IV

$$Y_i = \alpha_0 + \rho D_i + \beta_0 R_i + e_{0i}$$

- 操作変数推定 (2SLS) における **Reduced form**
- BLS に入ったか否かはクラスメートの質と関係があるが、自分自身の成績とは関係がない
  $\Rightarrow$ **除外制約**を満たしている

FRD = IV

以下の式で “Peer effect”(λ) を推定

First Stage:

$$\bar{X}_{(i)} = \alpha_1 + \phi D_i + \beta_1 R_i + e_{1i}$$

Second Stage:

$$Y_i = \alpha_2 + \lambda \hat{\bar{X}}_{(i)} + \beta_2 R_i + e_{2i}$$

FRD = IV, so...

操作変数法の仮定を満たす必要がある。

1. 除外制約 (exclusion restriction)
2. 単調性 (monotonicity)

操作変数法と同様、平均処置効果 (ATE) を推定するのではなく、**局所平均処置効果 (LATE)** を推定

- Complier における平均処置効果