政治学方法論 II 課題 3

宋財泫 (SONG Jaehyun) (123J009J)

2015-4-27(月)

1　二項分布モデル (1)

あるコインについて、そのコインを 1 回投げたときに表が出る確率 θ を推定したいとする。このとき、以下の各問に答えなさい。(fair-coin.R を参考に)

1. 1 度投げてみたら表が出た。事前分布を $\theta \sim \mathrm{Beta}(4; 4)$ とした場合の事後分布を示せ。

1 回投げて表が出る確率は $P(H|\theta) = \theta^1(1-\theta)^0$ であり、θ の事前分布が $\mathrm{Beta}(4; 4)$ の場合、事後分布は

$$P(\theta|H) = \frac{P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}{\int_0^1 P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)} \tag{1}$$

である。

```
theta <- seq(0, 1, by = 0.001) #パラメータの範囲を設定
##尤度を計算する関数
binom.lik <- function(theta, n, y){
  return(theta^y * (1 - theta)^(n-y))
}
##最初の事前分布としてBeta(4, 4)を設定
prior.func <- function(theta){
  return(dbeta(theta, 4, 4))
}
prior <- prior.func(x)

#数式(1)の分子の関数
post.func <- function(theta){
  return(binom.lik(theta, 1, 1) * prior.func(theta))
}
#上で定義したpost.funcを、post.funcを0から1まで積分した値で割る
post <- function(theta){
  return(post.func(theta) / integrate(post.func, lower = 0, upper = 1)$value)
```

```
}

#事前分布と事後分布の表示
plot(theta, post(theta), type = "l", lty = 2, lwd = 2,
     xlab = "theta", ylab = "Density")
polygon(theta, post(theta),
        col = rgb(0, 0, 255, alpha = 80, maxColorValue = 255),
        border = NA)
abline(h = max(post(theta)), v = 0.571, lty = 2)
lines(theta, prior, type = "l", lty = 1, lwd = 2)
polygon(theta, prior,
        col = rgb(255, 0, 0, alpha = 80, maxColorValue = 255),
        border = NA)
abline(h = max(prior), v = 0.5, lty = 1)
legend("topright", fill = c(rgb(255, 0, 0, alpha = 80, maxColorValue = 255),
                            rgb(0, 0, 255, alpha = 80, maxColorValue = 255)),
       legend = c("prior", "posterior"))
```

(図 1 この辺り)

図 1 を見ると、コインスピンで表が出たことによって事後分布がやや右に偏っていくことが確認できる。

2. もう一度投げたら、表が出た。事後分布を示せ。

式 1 を事前分布とし、同様の処理を行う。

$$P(\theta|H,H) = \frac{P(H|\theta)\frac{P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}{\int_0^1 P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}}{\int_0^1 P(H|\theta)\frac{P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}{\int_0^1 P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}} \tag{2}$$

```
#問題1-1の事後分布に尤度関数をかける。(数式(2)の分子)
post.func2 <- function(theta){
  return(binom.lik(theta, 1, 1) * post(theta))
}
#事後分布を計算する
post2 <- function(theta){
  post.func2(theta) / integrate(post.func2, lower = 0, upper = 1)$value
}

#事前分布と事後分布と表示
plot(x, post2(theta), type = "l", lty = 2, lwd = 2,
```

```
     xlab = "theta", ylab = "Density")
polygon(x, post2(theta),
        col = rgb(0, 0, 255, alpha = 80, maxColorValue = 255),
        border = NA)
abline(h = max(post2(theta)), v = 0.625, lty = 2)
lines(x, post(theta), type = "l", lty = 1, lwd = 2)
polygon(x, post(theta),
        col = rgb(255, 0, 0, alpha = 80, maxColorValue = 255),
        border = NA)
abline(h = max(post(theta)), v = 0.571, lty = 1)
legend("bottomright", fill = c(rgb(255, 0, 0, alpha = 80, maxColorValue = 255),
                               rgb(0, 0, 255, alpha = 80, maxColorValue = 255)),
       legend = c("prior", "posterior"))
```

(図 2 この辺り)

図 2 を見ると、コインスピンで表が出たことによって問題 1-1 の事後分布から右に偏っていくことが確認できる。

3. さらにもう一度投げたら裏が出た。事後分布を示せ。

問題 1-1、1-2 と同様であるが、尤度関数は $\theta^0(1-\theta)^1$ になる。したがって、事後分布は

$$P(\theta|H,H) = \frac{P(T|\theta)\dfrac{P(H|\theta)\frac{P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}{\int_0^1 P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}}{\int_0^1 P(H|\theta)\frac{P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}{\int_0^1 P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}}}{\int_0^1 P(H|\theta)\dfrac{P(H|\theta)\frac{P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}{\int_0^1 P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}}{\int_0^1 P(H|\theta)\frac{P(H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}{\int_0^1 P(T|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}}} \tag{3}$$

である。これを表示すると、

```
#数式(3)の分子
post.func3 <- function(theta){
  return(binom.lik(theta, 1, 0) * post.func2(theta))
}
#事後分布を計算する
post3 <- function(theta){
  post.func3(theta) / integrate(post.func3, lower = 0, upper = 1)$value
}

plot(x, post3(theta), type = "l", lty = 2, lwd = 2,
     xlab = "theta", ylab = "Density")
polygon(x, post3(theta),
```

```
        col = rgb(0, 0, 255, alpha = 80, maxColorValue = 255),
        border = NA)
abline(h = max(post3(theta)), v = 0.556, lty = 2)
lines(x, post2(theta), type = "l", lty = 1, lwd = 2)
polygon(x, post2(theta),
        col = rgb(255, 0, 0, alpha = 80, maxColorValue = 255),
        border = NA)
abline(h = max(post2(theta)), v = 0.625, lty = 1)
legend("bottomright", fill = c(rgb(255, 0, 0, alpha = 80, maxColorValue = 255),
                                rgb(0, 0, 255, alpha = 80, maxColorValue = 255)),
       legend = c("prior", "posterior"))
```

(図 3 この辺り)

図 3 のようになる。つまり、コイン・トスで裏が出ることによって事前分布は左の方に偏っていくことが確認できる。

4. 別の人間（したがって、上の答えは知らない）が同様のコイン投げを 3 回したところ (表、裏、表) という結果を得た。事前分布を θ〜Beta(4; 4) とした場合の事後分布を示せ。

事前分布を θ〜Beta(4; 4) に (表、裏、表) の結果が出るときの事後分布は、

$$P(\theta|H,T,H) = \frac{P(H,T,H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)}{\int_0^1 P(H,T,H|\theta)\mathrm{Beta}(4;4)} \tag{4}$$

である。尤度 $P(H,T,H|\theta)$ は $\theta^1(1-\theta)^0 \times \theta^0(1-\theta)^1 \times \theta^1(1-\theta)^0 = \theta^2(1-\theta)^1$ である。この関数を式 4 に代入して事後分布を計算し、表示する。

```
#尤度関数にBeta(4, 4)をかける。(数式(4)の分子)
post.func4 <- function(theta){
  return(binom.lik(theta, 1, 0) * dbeta(theta, 4, 4))
}
#事後分布を計算する
post4 <- function(theta){
  post.func4(theta) / integrate(post.func4, lower = 0, upper = 1)$value
}

#計算した事後分布をプロットする。
plot(x, post4(theta), type = "l", lty = 2, lwd = 2,
     xlab = "theta", ylab = "Density")
polygon(x, post4(theta),
        col = rgb(0, 0, 255, alpha = 80, maxColorValue = 255),
```

```
          border = NA)
abline(h = max(post4(theta)), v = 0.556, lty = 2)
lines(x, prior, type = "l", lty = 1, lwd = 2)
polygon(x, prior,
          col = rgb(255, 0, 0, alpha = 80, maxColorValue = 255),
          border = NA)
abline(h = max(prior), v = 0.5, lty = 1)
legend("bottomright", fill = c(rgb(255, 0, 0, alpha = 80, maxColorValue = 255),
                               rgb(0, 0, 255, alpha = 80, maxColorValue = 255)),
        legend = c("prior", "posterior"))
```

(図 4 この辺り)

計算結果、事後分布は事前分布と比べて右に偏ることが確認できた。

ちなみに、ベータ分布 $(\mathrm{Beta}(4;4))$ を事前分布にし、(成功、失敗、成功) の結果が得られた場合の事後分布は $\mathrm{Beta}(4+2;4+1)=\mathrm{Beta}(6;5)$ になる。図 4 の事後分布と $\mathrm{Beta}(6;5)$ を比較すると以下の図 5 のように一致することが確認できる。

(図 5 この辺り)

5. 1〜3 の結果と 4 の結果を比較考察しなさい。

(図 6 この辺り)

図 6 は問題 1-1 から 1-4 までの事後分布を同時を表示したものである。事後分布は Prob2 までは右に偏っていき、Prob3 では左に若干戻ってきた。ただし、問題 1-4 の結果はこの図からは確認出来ないが、これは問題 1-3 の事後分布と一致するためである。問題 1-3 の事後分布と 1-4 の事後分布のみを表示すると以下の図 7 のようになる。

(図 7 この辺り)

したがって、一回の施行ごとに分布を更新しても、三回の施行の結果で一緒に更新させても、最終的な事後分布は変わらないことが確認できる。

2 BDA3 の練習問題

BDA3 の練習問題 (2.11 Exercises) のうち、以下の問題を解きなさい。

1. Posterior infernece: suppose you have a Beta(4, 4) prior distribution on the probability θ that a coin will yield a "head" when spun in a specified manner. The coin is independently spun then times, and "heads" appear fewer than 3 times. You are not told how many heads were seen, only that the number is less than 3. Calculate your exact posterior density (up to a proportionality costant) for θ and sketch it.

本問題は $P(\theta|x < 3)(x =$10 回の coin flip から Head が出た回数) を求める問題であり、事前分布として $\mathrm{Beta}(4; 4)$ を設定した上で、ベイズルールを用いると、

$$P(\theta|x < 3) = \frac{P(X \leq 2|\theta)\mathrm{Beta}(4; 4)}{\int_0^1 P(X \leq 2|\theta)\mathrm{Beta}(4; 4)} \tag{5}$$

になる。ここで特定すべき関数は尤度関数 $P(X \leq 2|\theta)$ であり、coin flip は離散分布であるため、

$$\begin{aligned} P(X \leq 2|\theta) &= P(X = 2|\theta) + P(X = 1|\theta) + P(X = 0|\theta) \\ &= \binom{10}{2}\theta^2(1-\theta)^8 + \binom{10}{1}\theta^1(1-\theta)^9 + \binom{10}{0}\theta^0(1-\theta)^{10} \end{aligned} \tag{6}$$

の関係が成立する。以下の R ソースコードで再現すると、図 8 が得られる。

```
#thetaの範囲を指定
theta <- seq(0, 1, 0.001)

#尤度関数
prob2.1.lik.func <- function(theta){
  return((choose(10, 0) * theta^0 * (1-theta)^10) +
         (choose(10, 1) * theta^1 * (1-theta)^9) +
         (choose(10, 2) * theta^2 * (1-theta)^8))
}

#事後分布を計算する
post <- prob2.1.lik.func(theta) * dbeta(theta, shape1 = 4, shape2 = 4)
post <- post / integrate(prob2.1.lik.func, lower = 0, upper = 1)$value

#事後分布と事前分布を表示
plot(theta, dbeta(theta, shape1 = 4, shape2 = 4),
     type = "l", xlab = "theta", ylab = "Density")
```

```
polygon(theta, dbeta(theta, shape1 = 4, shape2 = 4),
        col = rgb(255, 0, 0, alpha = 80, maxColorValue = 255),
        border = NA)
lines(theta, post)
polygon(theta, post,
        col = rgb(0, 0, 255, alpha = 80, maxColorValue = 255),
        border = NA)
legend("topright", fill = c(rgb(255, 0, 0, alpha = 80, maxColorValue = 255),
                            rgb(0, 0, 255, alpha = 80, maxColorValue = 255)),
       legend = c("Prior", "Posterior"))
```

(図 8 この辺り)

2. Normal distribution with unknown mean: a random sample of n students is drawn from a large population, and their weights anre measured. The average weight of the n sampled students is $\bar{y} = 150$ pounds. Assume the weights in the population are normally distributed with unknown mean θ and known standard deviation 20 pounds. Suppose your prior distribution for θ is normal with mean 180 and standard deviation 40. Give your posterior distribution for θ. (Your answer will be a function of n)

θ の事前分布が $N(180, 40)$ にしたがうとすると $P(\theta)$ は、

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi 40^2}} \exp\left[-\frac{(\theta - 180)^2}{2 \times 40^2}\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{(\theta - 180)^2}{2 \times 40^2}\right] \end{aligned} \tag{7}$$

である ($\frac{1}{\sqrt{2\pi 40^2}}$ は定数であるため省略可能)。次に $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ が $N(150, 20)$ にしたがう場合、$P(y|\theta)$ は、

$$\begin{aligned} P(y|\theta) &= \prod_{i=1}^{n} P(y_i|\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi 20^2}} \exp\left[-\frac{(y_i - \theta)^2}{2 \times 20^2}\right] \\ &\propto \prod_{i=1}^{n} \exp\left[-\frac{(y_i - \theta)^2}{2 \times 20^2}\right] \end{aligned} \tag{8}$$

となる。したがって、$P(\theta|y)$ は、

$$\begin{aligned} P(\theta|y) &= \frac{P(y|\theta)P(\theta)}{P(y)} \\ &\propto P(y|\theta)P(\theta) \end{aligned} \tag{9}$$

であり、$P(y|\theta)P(\theta)$ は、

$$\begin{aligned}
P(y|\theta)P(\theta) &= \exp\left[-\frac{(\theta-180)^2}{2\times 40^2}\right]\prod_{i=1}^{n}\exp\left[-\frac{(y_i-\theta)^2}{2\times 20^2}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{(\theta-180)^2}{2\times 40^2}\right]\exp\left[\sum_{i=1}^{n}-\frac{(y_i-\theta)^2}{2\times 20^2}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{(\theta-180)^2}{2\times 40^2}+\sum_{i=1}^{n}-\frac{(y_i-\theta)^2}{2\times 20^2}\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(\theta-180)^2}{40^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\theta)^2}{20^2}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(\theta^2-2\theta 180+180^2)}{40^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i^2-2y_i\theta+\theta^2)}{20^2}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(\theta^2-2\theta 180+180^2)}{40^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2n\bar{y}\theta+n\theta^2}{20^2}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{20^2(\theta^2-2\theta 180+180^2)+40^2(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-2n150\theta+n\theta^2)}{40^2 20^2}\right)\right] \\
&\quad \text{ここで、分子の中で}\theta\text{と無関係な項をとると、} \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{20^2\theta^2-20^2 2\theta 180-40^2 2n150\theta+40^2 n\theta^2}{40^2 20^2}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2(20^2+40^2 n)-2\theta(20^2 180+40^2 n150)}{40^2 20^2}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2-2\theta\frac{(20^2 180+40^2 n150)}{(20^2+40^2 n)}}{\frac{40^2 20^2}{(20^2+40^2 n)}}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(\theta-\frac{20^2 180+40^2 n150}{20^2+40^2 n})^2}{\frac{40^2 20^2}{(20^2+40^2 n)}}\right)\right]\text{(分子の項を展開しても}\theta\text{と無関係の項があるため)} \qquad (10)
\end{aligned}$$

のように平均 $\dfrac{20^2 180+40^2 n150}{20^2+40^2 n}$、分散 $\dfrac{40^2 20^2}{20^2+40^2 n}$ の正規分布の形になる。これらの分数を整理すると平均値は、

$$\begin{aligned}
\frac{20^2 180+40^2 n150}{20^2+40^2 n} &= 180\frac{20^2}{20^2+40^2 n}+150\frac{40^2 n}{20^2+40^2 n} \\
&= 180\left(\frac{20^2+40^2 n}{20^2}\right)+\left(150\frac{20^2+40^2 n}{40^2 n}\right) \\
&= 180\left(\frac{1}{\frac{20^2}{20^2}+\frac{40^2 n}{20^2}}\right)+150\left(\frac{1}{\frac{20^2}{40^2 n}+\frac{40^2 n}{40^2 n}}\right) \\
&= 180\left(\frac{\frac{1}{40^2}}{\frac{1}{40^2}+\frac{n}{20^2}}\right)+150\left(\frac{\frac{n}{20^2}}{\frac{1}{40^2}+\frac{n}{20^2}}\right) \\
&= \frac{\frac{1}{40^2}180+\frac{n}{20^2}150}{\frac{1}{40^2}+\frac{n}{20^2}} \qquad (11)
\end{aligned}$$

であり、分散は、

$$\begin{aligned}\frac{40^2 20^2}{20^2+40^2 n} &= \left(\frac{20^2+40^2 n}{40^2 20^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{20^2+40^2 n}{40^2 20^2}} \\ &= \frac{1}{\frac{20^2}{40^2 20^2}+\frac{40^2 n}{40^2 20^2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{40^2}+\frac{n}{20^2}} \end{aligned} \tag{12}$$

になる。したがって、事後分布は

$$P(\theta|y) \sim N\left(\underbrace{\frac{\frac{1}{40^2}180+\frac{n}{20^2}150}{\frac{1}{40^2}+\frac{n}{20^2}}}_{(11)}, \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{40^2}+\frac{n}{20^2}}}_{(12)}\right)$$

である。

3　図表

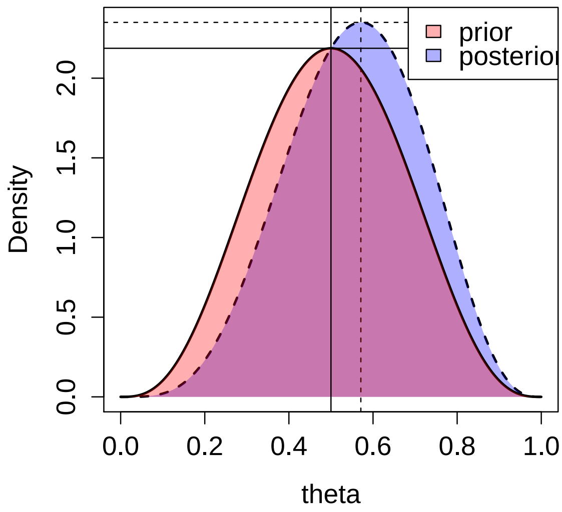

図 1　問 1-1 の事前分布と事後分布

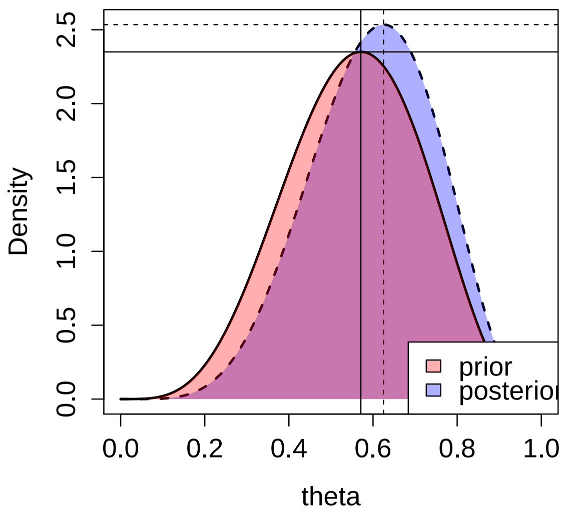

図 2　問 1-2 の事前分布と事後分布

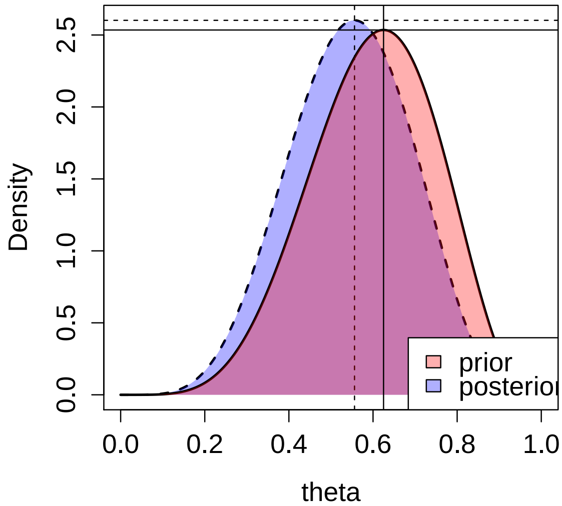

図 3　問 1-3 の事前分布と事後分布

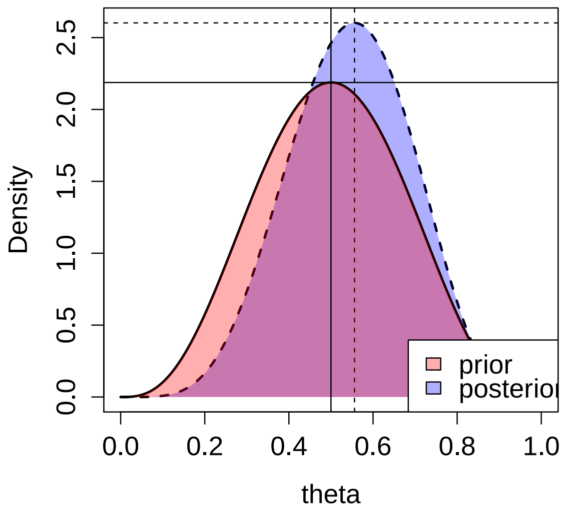

図 4　問 1-4 の事前分布と事後分布

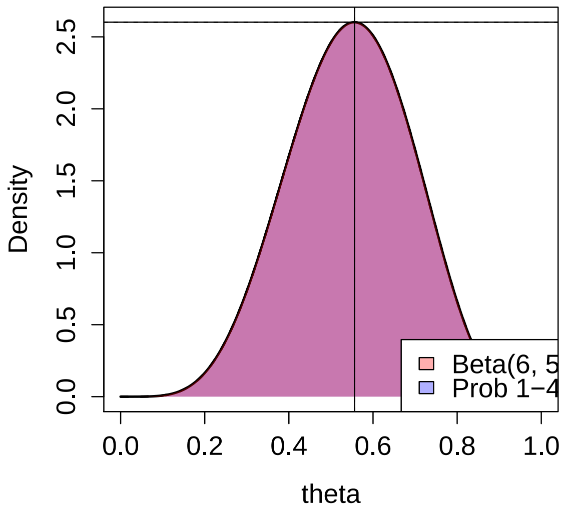

図 5　問 1-4 の事後分布と Beta(6, 5) の比較

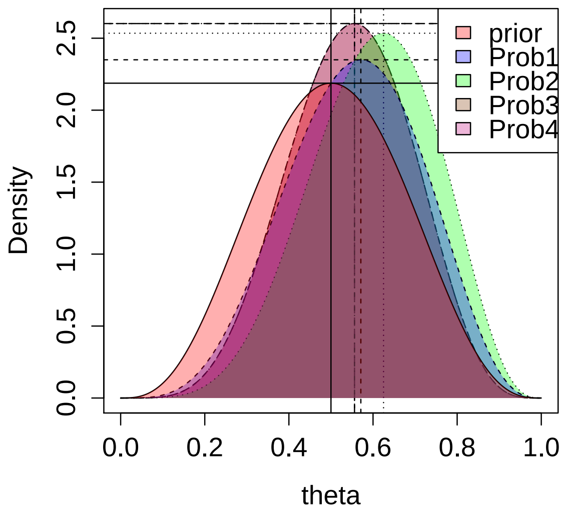

図 6　問 1-1 から 1-4 の事前分布と事後分布の比較

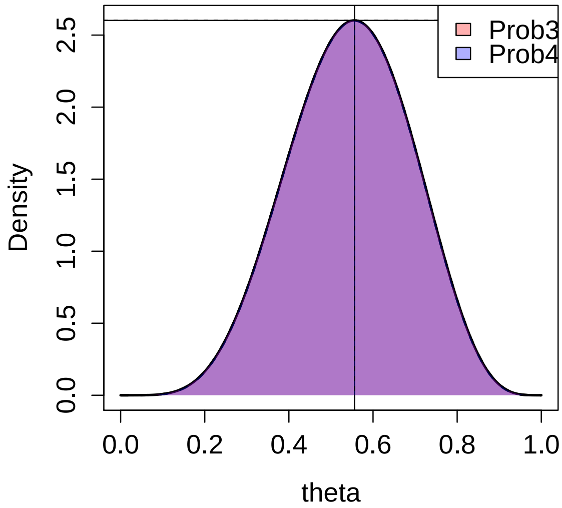

図 7　問 1-3 と 1-4 の事後分布の比較

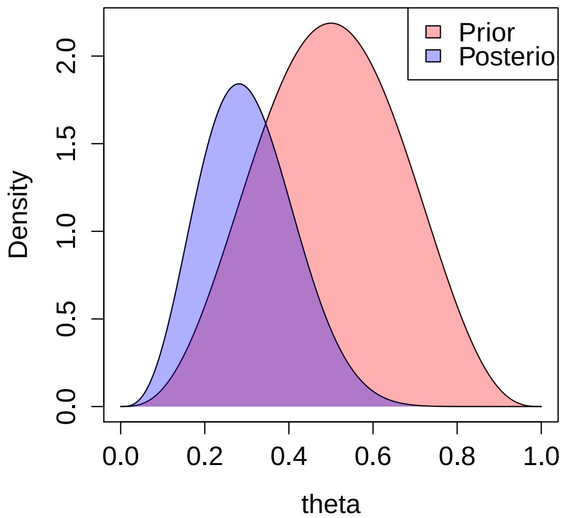

図 8　問 2-1 の事前分布と事後分布