政治学方法論I課題10

提出者：宋財泫(ソンジェヒョン)(123J009J)　提出日：2014-12-16(火)

1　問題1

確率 θ で表、$1-\theta$ で裏が出るコインを 10 回投げたところ、表が 7 回出た。このとき、以下の各問に答えなさい。

問 1-1　このデータに対する θ の尤度関数を図示しなさい。

(図 1 この辺り)

問 1-2　このデータに対する θ の対数尤度関数を図示しなさい。

(図 2 この辺り)

問 1-3　最尤推定値 (MLE) を求めなさい。

最尤推定値はスコア関数 $S(\theta)=0$ の解であり、スコア関数は対数尤度関数の一次導関数である。この場合、スコア関数は

$$
\begin{aligned}
S(\theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{10}\log[\theta^7(1-\theta)^3] \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}7\log\theta + 3\log(1-\theta) = \frac{7}{\theta} - \frac{3}{(1-\theta)}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

であり、$S(\theta)=0$ は

$$
\begin{aligned}
&\frac{7}{\theta} - \frac{3}{(1-\theta)} = 0 \\
&7(1-\theta) - 3\theta = 0 \\
&7 - 7\theta - 3\theta = 7 - 10\theta = 0 \\
&7 = 10\theta \\
&0.7 = \theta
\end{aligned}
\tag{2}
$$

であり、したがって最尤推定値は 0.7 である。

問 1-4　フィッシャー情報量を求めなさい。

フィッシャー情報量は対数尤度関数の二次導関数であり、つまりスコア関数の一次導関数である。この場合、フィッシャー情報量は

$$
\begin{aligned}
I(\theta) &= -\frac{\partial\partial}{\partial\partial\theta}\mathrm{log}L(\theta) = -\frac{\partial\partial}{\partial\partial\theta}\sum_{i=1}^{10}\mathrm{log}[\theta^7(1-\theta)^3] \\
&= -\frac{\partial\partial}{\partial\partial\theta}7\mathrm{log}\theta + 3\mathrm{log}(1-\theta) = -\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{7}{\theta} - \frac{3}{(1-\theta)} \\
&= \frac{7}{\theta^2} + \frac{3}{(1-\theta)^2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

であり、式 3 に問題 1-3 で求めた θ の推定値 0.7 を代入すると

$$
\begin{aligned}
I(\hat{\theta}) &= \frac{7}{\hat{\theta}^2} + \frac{3}{(1-\hat{\theta})^2} \\
&= \frac{7}{0.7^2} + \frac{3}{(1-0.7)^2} = 47.61905
\end{aligned}
\tag{4}
$$

である。つまり、フィッシャー情報量は 47.61905 である。

問 1-5　90% 信頼区間、95% 信頼区間に相当する尤度区間を求め、標準化した尤度関数とともに図示しなさい (図は 1 つでも 2 つでもかまわない)。

尤度区間が任意の閾値 c を超える区間を表すものであり、尤度関数内の確率密度関数が正規分布である場合、90% 尤度区間の閾値は $c = exp(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(0.10)}) = exp(-\frac{1}{2}2.706) = 0.2585$ であり、95% 尤度区間は $c = exp(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(0.05)}) = exp(-\frac{1}{2}3.841) = 0.1465$ である。これらの閾値を超える区間が 90%(95%) 尤度区間であり、図 3、 4 のように表現できる。

(図 3、 4 この辺り)

90% 尤度区間: (0.4423298, 0.8912395)[1)]
95% 尤度区間: (0.3934544, 0.9154462)

1) R の uniroot 関数 (ニュートン法) を用いて計算を行った。

問 1-6　$\theta = 0.5$ という帰無仮説について Wald 統計量を求め、有意水準 5% で仮説を検定しなさい。

Wald 統計量は $z = \dfrac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE(\hat{\theta})}$ であり、一般的に最尤推定値の標準誤差は $SE(\hat{\theta}) = I(\hat{\theta})^{-\frac{1}{2}}$、つまり、フィッシャー情報量の平方根の逆数である。

$$SE(\hat{\theta}) = I(\hat{\theta})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{47.61905}} = 0.1449138 \tag{5}$$

したがって、$\theta = 0.5$ という帰無仮説、つまりに $\theta \neq 0.5$ という仮説の Wald 統計量は

$$z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE(\hat{\theta})} = \frac{0.7 - 0.5}{0.1449138} = 1.380131 \tag{6}$$

である。Wald 統計量は正規分布にしたがうため、Wald 統計量が ±1.96 の範囲内の収まると 5% 水準で帰無仮説は支持される。したがって $\theta = 0.5$ という帰無仮説は 5% 水準で採択され、$\theta \neq 0.5$ という仮説は棄却される。他の方法としては信頼区間内に帰無仮説、$\theta = 0.5$ が含まれているかを確認する方法があり、Wald 統計量に基づいた 95% 信頼区間は

$$\begin{aligned}\hat{\theta} \pm 1.96 SE(\hat{\theta}) &= 0.7 \pm 1.96 \times 0.1449138 \\ &= 0.7 \pm 0.284031 \\ &= (0.415969, 0.984031)\end{aligned} \tag{7}$$

であり、95% 信頼区間内に帰無仮説である $\theta = 0.5$ を含むことが確認できる。

問 1-7　尤度区間に基づく推論と、Wald 統計量 (Wald 信頼区間) に基づく推論の異同について説明しなさい。

尤度区間に基づく 95% 信頼区間、(0.3934544, 0.9154462) と Wald 統計量に基づく 95% 信頼区間は (0.415969, 0.984031) に下限においては 0.0225146、上限においては 0.0685848 の差がある。また符号まで含めて考えると下限は尤度区間の方が小さく見積もる傾向があり、上限においては反対である。この差は正規分布にしたがう Wald 統計量は対称であるに対して尤度関数が非対称的であることから起因されると考えられる。サンプルサイズが小さく、尤度関数が左右対称に近似しない場合は、Wald 統計量より尤度信頼区間を用いた方が望ましいと思われる。

2　問題 2

確率 θ で表、$1-\theta$ で裏が出るコインを 100 回投げたところ、表が 70 回出た。このとき、以下の各問に答えなさい。

問 2-1　このデータに対する θ の尤度関数を図示しなさい。

(図 5 この辺り)

問 2-2　このデータに対する θ の対数尤度関数を図示しなさい。

(図 6 この辺り)

問 2-3　最尤推定値 (MLE) を求めなさい。

問 1-3 の手順と同様、スコア関数は

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{log}L(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{100}\mathrm{log}[\theta^7 0(1-\theta)^3 0] \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta}70\mathrm{log}\theta + 30\mathrm{log}(1-\theta) = \frac{70}{\theta} - \frac{30}{(1-\theta)} \end{aligned} \tag{8}$$

であり、$S(\theta)=0$ の解が最尤推定値である。したがって、最尤推定値は

$$\begin{aligned} &\frac{70}{\theta} - \frac{30}{(1-\theta)} = 0 \\ &70(1-\theta) - 30\theta = 0 \\ &70 - 70\theta - 30\theta = 70 - 100\theta = 0 \\ &70 = 100\theta \\ &0.7 = \theta \end{aligned} \tag{9}$$

であり、したがって最尤推定値は 0.7 である。

問 2-4　フィッシャー情報量を求めなさい。

問 1-4 と同様、フィッシャー情報量は

$$
\begin{aligned}
I(\theta) &= -\frac{\partial\partial}{\partial\partial\theta}\mathrm{log}L(\theta) = -\frac{\partial\partial}{\partial\partial\theta}\sum_{i=1}^{100}\mathrm{log}[\theta^7 0(1-\theta)^3 0] \\
&= -\frac{\partial\partial}{\partial\partial\theta}70\mathrm{log}\theta + 30\mathrm{log}(1-\theta) = -\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{70}{\theta} - \frac{30}{(1-\theta)} \\
&= \frac{70}{\theta^2} + \frac{30}{(1-\theta)^2} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

であり、式 10 に問題 2-3 で求めた θ の推定値 0.7 を代入すると

$$
\begin{aligned}
I(\hat{\theta}) &= \frac{70}{\hat{\theta}^2} + \frac{30}{(1-\hat{\theta})^2} \\
&= \frac{70}{0.7^2} + \frac{30}{(1-0.7)^2} = 476.1905 \qquad (11)
\end{aligned}
$$

である。つまり、フィッシャー情報量は 476.1905 である。

問 2-5　90% 信頼区間、95% 信頼区間に相当する尤度区間を求め、標準化した尤度関数とともに図示しなさい (図は 1 つでも 2 つでもかまわない)。

(図 7、 8 この辺り)

90% 尤度区間: (0.6214938, 0.7713379)

99% 尤度区間: (0.6059051, 0.7839727)

問 2-6　$\theta = 0.5$ という帰無仮説について Wald 統計量を求め、有意水準 5% で仮説を検定しなさい。

問 1-6 の手順と同様に

$$
\begin{aligned}
SE(\hat{\theta}) &= I(\hat{\theta})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{476.1905}} = 0.04582576 \\
z &= \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{SE(\hat{\theta})} = \frac{0.7 - 0.5}{0.04582576} = 4.364358 \qquad (12)
\end{aligned}
$$

である。z が ± 1.96 範囲外にあるため、帰無仮説は棄却され、$\theta \neq 0.5$ という仮説が支持される。また、95% 信頼区間は

$$\begin{aligned}\hat{\theta} \pm 1.96SE(\hat{\theta}) &= 0.7 \pm 1.96 \times 0.04582576 \\ &= 0.7 \pm 0.284031 \\ &= (0.6101815, 0.7898185) \end{aligned} \tag{13}$$

であり、95% 信頼区間内に帰無仮説である $\theta = 0.5$ を含まないことが確認できる。

問 2-7　尤度区間に基づく推論と、Wald 統計量 (Wald 信頼区間) に基づく推論の異同について説明しなさい。

尤度区間に基づく 95% 信頼区間、(0.6214938, 0.7713379) と Wald 統計量に基づく 95% 信頼区間は (0.6101815, 0.7898185) に下限においては 0.0113123、上限においては 0.0184806 の差がある。下限と上限の差の違いの原因は問 1-7 と同様であるが、問 1-7 と比べてその差はかなり小さい。これは図 5 から確認できるように、尤度関数が左右対称に近いためである。つまり、サンプルサイズが大きく、尤度関数が左右対称に近似すると、Wald 統計量に基づく信頼区間は尤度信頼区間と差が小さくなることが確認できる。

3　問題 3

問 1 と問 2 を比較し、どのような違いがあるか説明しなさい。また、その違いを生み出した原因 (と思われるもの) を特定しなさい。

問題 1 と問題 2 は同じパラメータ、$\theta = 0.7$ を有し、推定値もまた $\hat{\theta} = 0.7$ で同じである。しかし、信頼区間には大きな差があり、$\theta = 0.5$ という帰無仮説の検定では相反する結果が出た。これはサンプルサイズによるものである。図 1 と 5 を見れば確認できるように、サンプルサイズが大きくなると大数の法則によって尤度関数はパラメーターを中心に集中する。また、フィッシャー情報量も同様に大きくなり、パラメーターの不確実性も低下する。

(図 9 この辺り)

また、図 9 からも確認できるように、サンプルサイズが小さいと Wald 統計量に基づく信頼区間と差が大きくなる。図 9 の左側は尤度区間と Wald 信頼区間を表すグラフであり、右側のグラフは 95% 信頼区間の差を上限と下限で分けたものである。一貫して信頼区間の上限において相対的に大きなズレは確認できるものの、その差は小さく、0 に収斂することが確認できる。このように、大きいサンプルサイズの場合は Wald 信頼区間を

用いても大きな差はないが、尤度関数が θ を中心とした二次関数であり、かつ、サンプルサイズが少ない場合は尤度区間を用いたほうがより正確な区間推定ができよう (Hudson 1971)[2]。

[2] Hudson D. J. 1971. "Interval Estimation from the Likelihood Function." *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological).* 33(2). pp.256-262

4 図表

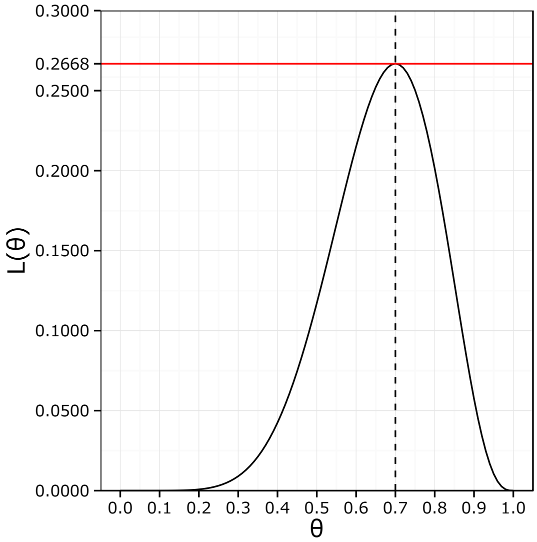

図 1　$n = 10, k = 7$ の場合の尤度関数

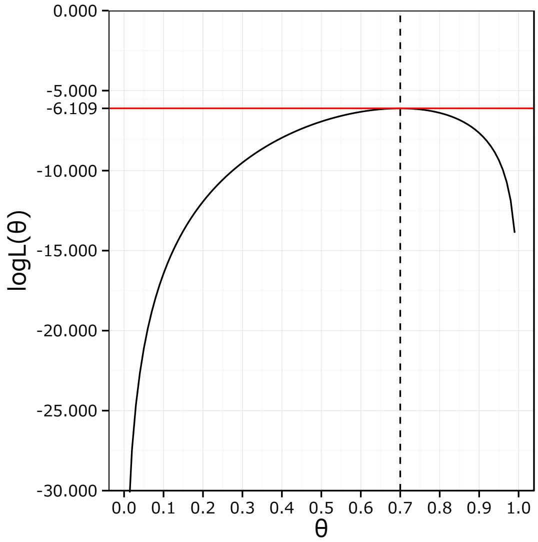

図 2　$n = 10, k = 7$ の場合の対数尤度関数

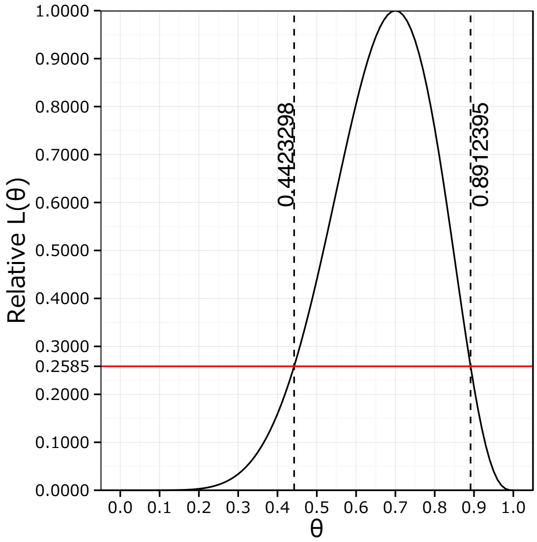

図 3　$n = 10, k = 7$ の場合の 90% 尤度区間

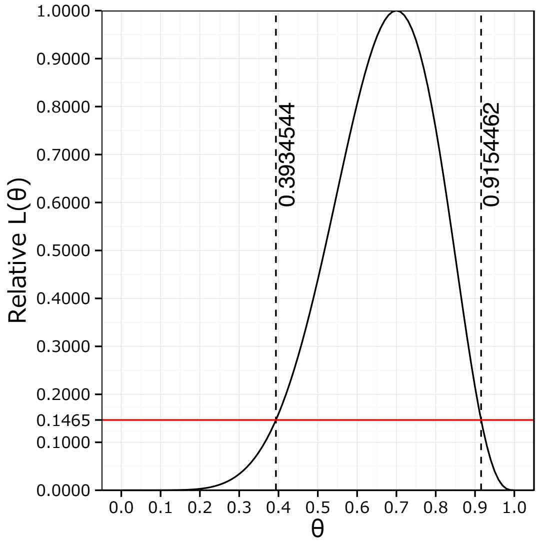

図 4　$n = 10, k = 7$ の場合の 95% 尤度区間

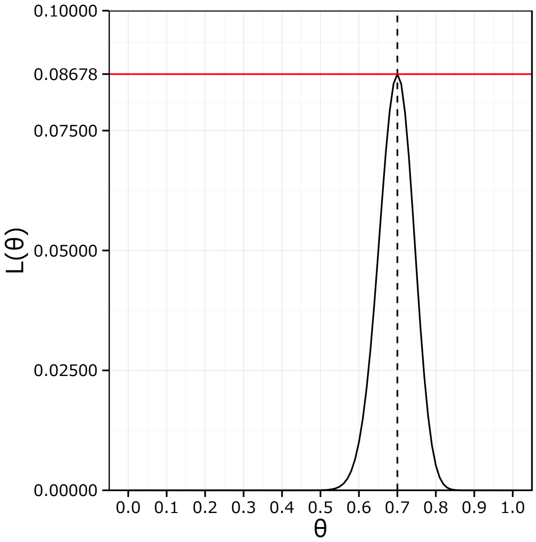

図 5　$n = 100, k = 70$ の場合の尤度関数

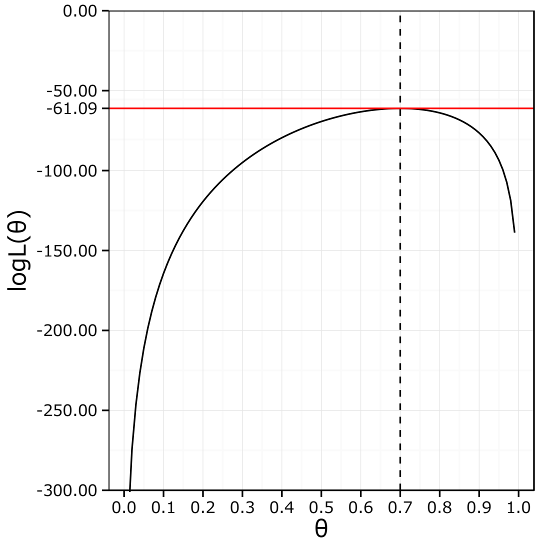

図 6　$n = 100, k = 70$ の場合の対数尤度関数

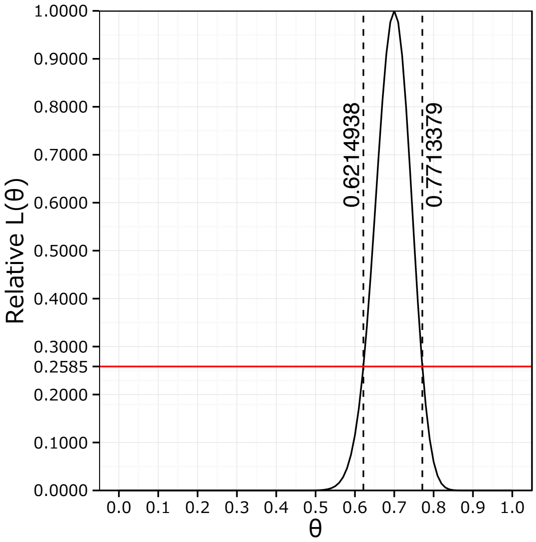

図 7　$n = 100, k = 70$ の場合の 90% 尤度区間

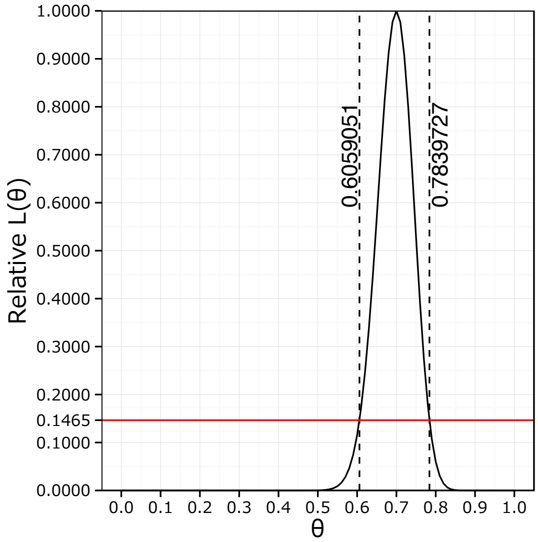

図 8　$n = 100, k = 70$ の場合の 95% 尤度区間

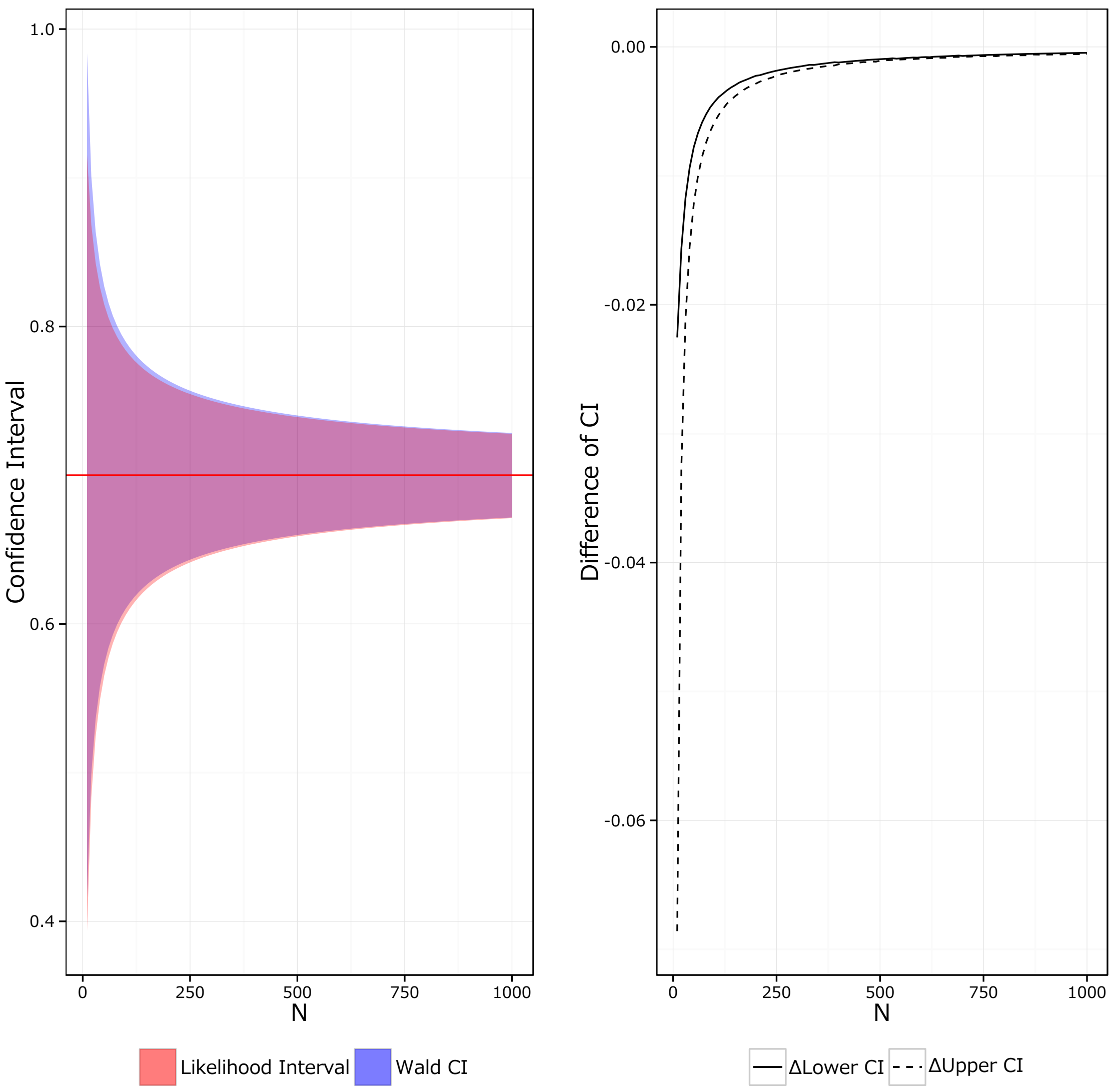

図 9　サンプルサイズによる Wald 信頼区間と尤度区間 (95%)